unidad 1

Matrices

contenidos

1. Matrices
2. Tipos de matrices
3. Operaciones con matrices
4. Producto de matrices
5. Trasposición de matrices. Matriz simétrica y antisimétrica
6. Matriz inversa
7. Rango de una matriz
8. Las matrices en la vida real

Número y forma son los conceptos básicos sobre los que se asientan las ramas más antiguas de las Matemáticas: la aritmética y la geometría. El desarrollo de los acontecimientos históricos hizo que los procedimientos propios de la aritmética diesen lugar a la creación de un lenguaje con símbolos y de una rama de las Matemáticas que llamamos álgebra.

El álgebra, que fue cultivada y enriquecida desde tiempos antiguos (babilonios, egipcios y griegos), alcanzó una de sus cimas en el siglo XIX. Una de sus numerosas ramas, denominada álgebra lineal, ofrece instrumentos de aplicación muy diversos.

Entre las herramientas del álgebra lineal se encuentran las matrices. Este concepto fue introducido, hacia 1850, por el matemático inglés **James Joseph Sylvester** (1814-1897) y su teoría desarrollada por **Arthur Cayley** (1821-1895) y **William Rowan Hamilton** (1805-1865).

En la vida diaria nos encontramos con matrices en todas aquellas situaciones en las que aparecen gran cantidad de datos como en los paneles de horarios de aviones, horarios de trenes, autobuses, cotizaciones de la bolsa, cambio de divisas, etc. Esto es debido a que la notación matricial nos permite una mejor visualización de los datos.

Las matrices se utilizan en diversos ámbitos del saber: Comercio, Economía, Sociología, Informática, Física, etc.

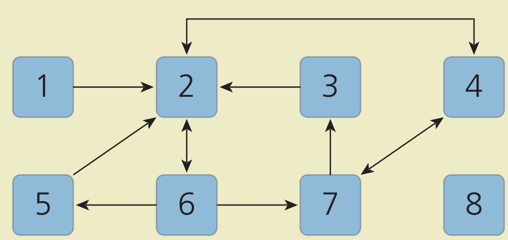
cuestiones iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases}$

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, prueba que $P^2 = P$.

3. El grafo siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



1. Matrices

El concepto de matriz como cuadro o tabla de números es una de las herramientas con mayor número de aplicaciones. Así, encontramos matrices en Sociología (matriz asociada a un gráfico), en Economía (matriz de *input-output*, matriz de un juego), Demografía (matriz de evolución de la población) y en otros ámbitos.

La idea intuitiva de matriz de números no presenta dificultad: una matriz es un cuadro o tabla de números ordenados.

- Se llama **matriz de dimensión $m \times n$** a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz A se puede designar también como:

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{donde: } \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

- Un **elemento** genérico de la matriz se designa por a_{ij}, donde el subíndice i representa el número de fila que ocupa el elemento y el subíndice j el número de columna.

Cuadrados mágicos

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Una disposición de números en un cuadro que, al ser sumados en filas, columnas y diagonales, dan el mismo resultado se llama **cuadrado mágico** (matriz mágica). El primer cuadrado mágico del que se tiene conocimiento es el que figura arriba.

Grandes matemáticos como Euler (1707-1783) y Cayley (1821-1895) dedicaron parte de su tiempo a estudiarlos.

Conjuntos de matrices

- El conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ se denota por:

$$M_{m \times n}$$

- El conjunto de matrices de dimensión $n \times n$, también llamadas de **orden** n, se denota por:

$$M_n$$

Las matrices de este conjunto se llaman **matrices cuadradas** y en ellas definimos:

— la **diagonal principal** formada por los elementos a_{ii};

— la **diagonal secundaria** formada por los elementos de la forma a_{ij} que cumplen $i + j = n + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

↑ Cuadrado mágico de constante 798 y en el cual todos sus elementos son números primos acabados en 7.

2. Tipos de matrices

2.1. Matrices rectangulares

- **Matriz rectangular** es aquella que tiene distinto número de filas que de columnas ($m \neq n$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz rectangular } 2 \times 3$$

- **Matriz fila** es toda matriz rectangular con una sola fila, de dimensión $1 \times n$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz fila } 1 \times 4$$

- **Matriz columna** es toda matriz rectangular con una sola columna, de dimensión $m \times 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz columna } 2 \times 1$$

- **Matriz nula** es una matriz con todos sus elementos nulos. Se denota por 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz nula } 3 \times 2$$

2.2. Matrices cuadradas

- **Matriz cuadrada de orden *n*** es aquella que tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz cuadrada de orden 2}$$

- **Matriz triangular** es aquella que tiene nulos todos los términos situados por debajo (triangular superior) o por encima (triangular inferior) de la diagonal principal.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz triangular superior de orden 3}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz triangular inferior de orden 4}$$

- **Matriz diagonal** es toda matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz diagonal de orden 3}$$

- **Matriz escalar** es toda matriz diagonal en la que todos los términos de la diagonal principal son iguales.

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz escalar de orden 2}$$

- **Matriz unidad** es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos. Se designa por *I*.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ matriz unidad de orden 3}$$

Arthur Cayley (1821-1895)

Matemático británico, profesor de la Universidad de Cambridge. Fue el creador de la teoría de matrices tal como se conoce en la actualidad.

James J. Sylvester (1814-1897)

Matemático británico, amigo de Arthur Cayley. Ambos pusieron los cimientos de la llamada álgebra lineal. Fue profesor de la Universidad de Oxford.

3. Operaciones con matrices

3.1. Igualdad de matrices

De igual forma que en cursos anteriores se hizo en conceptos como polinomios, sucesión, función, etc., al definir la igualdad entre estos objetos matemáticos, establecemos la igualdad de matrices.

- Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

3.2. Suma de matrices

- Para dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión $m \times n$, **la suma de A y B** es la matriz de la misma dimensión $m \times n$ dada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, la suma de $A + B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

La suma de matrices está, en definitiva, íntimamente ligada a la suma de números reales y, por tanto, todas las propiedades de la suma de números reales dan lugar a propiedades de la suma de matrices. Estas pueden verse en el margen.

Propiedades de la suma

1. **Asociativa**

   $A + (B + C) = (A + B) + C$

2. **Elemento neutro**

   La matriz nula, 0, de la dimensión correspondiente es el elemento neutro para la suma, ya que:

   $A + 0 = A$

3. **Elemento opuesto**

   Para la matriz A existe otra matriz que denotamos por $-A$ y que llamamos matriz opuesta de A, que cumple:

   $A + (-A) = 0$

4. **Conmutativa**

   $A + B = B + A$

3.3. Producto por un número (escalar)

- Para un número real k y una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$, **el producto de un número real por una matriz** es la matriz de la misma dimensión $m \times n$ dada por:

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Es decir, el producto $k \cdot A$ se obtiene multiplicando el número real por cada uno de los elementos de la matriz.

El número real k que multiplica a la matriz se denomina **escalar.** Esta operación siempre tiene sentido, es decir, puede efectuarse para matrices de cualquier dimensión.

Para un número real k y una matriz A de orden 3, el producto kA se realiza así:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Las principales propiedades que posee el producto de un número por una matriz pueden verse en el margen.

Propiedades del producto por un número

1. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
2. $(k + t) \cdot A = k \cdot A + t \cdot A$
3. $k \cdot (t \cdot A) = (kt) \cdot A$
4. $1 \cdot A = A$

ACTIVIDADES **RESUELTAS**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + B - C$ b) $A - B + C$ c) $2A - 3B$ d) $A - 2B + 3C$

a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A - 2B + 3C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$

2. Halla la matriz A que satisface la igualdad:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} + A$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$; sustituyendo en la expresión del enunciado y operando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 15 & 18 \\ 6 & 24 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & 4 + a_{13} \\ -2 + a_{21} & 7 + a_{22} & 3 + a_{23} \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices y resolviendo el sistema, se tiene que $A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 14 \\ 8 & 17 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Determina las matrices X e Y si se cumple:

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$. El sistema de ecuaciones matricial queda:

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por reducción, obtenemos como expresiones para X e Y las siguientes:

$$X = 2A - B \quad \text{e} \quad Y = -3A + 2B$$

Sustituyendo A y B, las matrices buscadas son:

$$X = 2\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$Y = -3\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

→

4. Producto de matrices

Definiremos una operación entre matrices que no es tan natural como las que se han visto en las páginas anteriores. Esta operación, que llamaremos producto de matrices, no siempre puede realizarse, y en los casos en que sí tenga sentido, no cumplirá una propiedad tan usual como la conmutatividad.

Al carecer esta operación de la propiedad conmutativa se hace necesario precisar el orden de multiplicación de las matrices. Para poder multiplicar dos matrices va a ser necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

- El **producto de dos matrices,** $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ de dimensión $n \times p$, es la matriz $A \cdot B$ de dimensión $m \times p$ dada por:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad \text{o bien} \quad (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik}) \text{ con:}$$

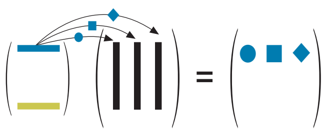
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

Es decir, cada elemento c_{ik} se obtiene multiplicando ordenadamente los elementos de la fila i-ésima de la primera matriz por los elementos de la columna k-ésima de la segunda matriz y sumando los resultados.

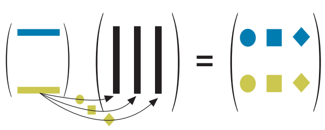
Forma práctica de multiplicar matrices

Para multiplicar dos matrices:

- Tomamos la primera fila de la primera matriz y la multiplicamos por todas las columnas de la segunda, obteniendo así la primera fila de la matriz producto.



- Tomamos la segunda fila de la primera matriz y la multiplicamos por todas las columnas de la segunda, obteniendo así la segunda fila de la matriz producto.



- Y así sucesivamente con el resto de las filas de la primera matriz.

Ejemplos de productos de matrices:

- $$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

- $$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 24 & -8 \\ 57 & -14 \end{pmatrix}}$$

Propiedades del producto de matrices cuadradas

- El producto de matrices cuadradas es **asociativo:**

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Así por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right]} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

- El producto de matrices cuadradas de orden n posee como **elemento neutro** la matriz unidad o identidad de orden n, I, ya que:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

- El producto de matrices cuadradas es **distributivo respecto de la suma** de matrices:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad I \cdot A = A$$

Así por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 23 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$$

- El producto de matrices cuadradas es, en general, **no conmutativo:**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

En el caso en el que existan dos matrices A y B que cumplan que $AB = BA$, se dice que A y B conmutan.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

4. Calcula $A^2 - B^2$ y $(A - B)^2$ dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Operando obtenemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Trasposición de matrices. Matriz simétrica y antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

3×4

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

4×3

- Se llama **matriz traspuesta** de una matriz A de dimensión $m \times n$ a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por columnas o las columnas por filas. Se representa por A^t y su dimensión es $n \times m$. Si la matriz es cuadrada su traspuesta tiene el mismo orden.

Las principales propiedades de la trasposición de matrices son:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ con $k \in \mathbb{R}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

La trasposición de matrices nos permite definir dos nuevos tipos de matrices: matrices simétricas y matrices antisimétricas.

La **matriz simétrica** se puede definir de dos formas:

- Se llama matriz simétrica a toda matriz cuadrada A que coincide con su traspuesta:

$$A = A^t$$

- Se llama matriz simétrica a toda matriz cuadrada que tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal principal.

William R. Hamilton (1805-1865)

Matemático, físico y astrónomo irlandés, considerado el creador del álgebra moderna. Fue el fundador de una escuela británica de grandes algebristas.

Las matrices simétricas son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

La **matriz antisimétrica (hemisimétrica)** se puede definir de dos formas:

- Se llama matriz antisimétrica (o hemisimétrica) a toda matriz cuadrada A que coincide con la opuesta de su traspuesta:

$$A = -A^t$$

- Se llama matriz antisimétrica a toda matriz cuadrada que tiene opuestos los elementos simétricos respecto a la diagonal principal y nulos los elementos de esta.

Las matrices antisimétricas son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & r \\ -y & -t & 0 & s \\ -z & -r & -s & 0 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

5. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$**.**

Comprobamos que se cumple $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 20 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 3 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 3 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Observamos que la igualdad matricial es cierta.

6. **Comprueba que cualquier matriz cuadrada** A **puede descomponerse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Aplícalo a la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$**.**

Llamamos S a la matriz simétrica y T a la antisimétrica que cumplan $A = S + T$.

Trasponiendo la igualdad anterior, obtenemos $A^t = (S + T)^t = S^t + T^t = S - T$.

Resolviendo el sistema matricial $\begin{cases} S + T = A \\ S - T = A^t \end{cases}$, obtenemos S y T:

$$S = \frac{A + A^t}{2} \qquad T = \frac{A - A^t}{2}$$

Para la matriz A del enunciado, la descomposición $A = S + T$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. **Encuentra todas las matrices** A **simétricas y de orden 2 que verifiquen** $A^2 = I$**.**

Para la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ debe verificarse $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operando obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ b(a + c) &= 0 \\ b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación deducimos que $b = 0$ o $a + c = 0$.

En el caso $b = 0$, sustituyendo en las otras ecuaciones, obtenemos los valores $a = \pm 1$ y $c = \pm 1$ que dan como solución las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En el caso $a + c = 0$, con $c = -a$, sustituyendo, obtenemos $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$ que dan como solución las matrices $\begin{pmatrix} a & \sqrt{1 - a^2} \\ \sqrt{1 - a^2} & -a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & -\sqrt{1 - a^2} \\ -\sqrt{1 - a^2} & -a \end{pmatrix}$ con $-1 < a < 1$.

→

6. Matriz inversa

- La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A de orden n es la matriz A^{-1} de orden n que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- Las matrices que tienen inversa se llaman **matrices regulares** y las que no tienen inversa **matrices singulares.**

Karl F. Gauss (1777-1855)

Gauss dio un fuerte impulso a la resolución de sistemas de ecuaciones con el método que lleva su nombre.

6.1. Cálculo de la matriz inversa

Para calcular la matriz inversa de una matriz regular podemos utilizar dos procedimientos:

- **Mediante la definición.** Por ejemplo, para hallar la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ utilizamos la definición y obtenemos:

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 3a + 7c &= 0 \\ b + 2d &= 0 \\ 3b + 7d &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 7 \\ b &= -2 \\ c &= -3 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Luego la matriz inversa es:

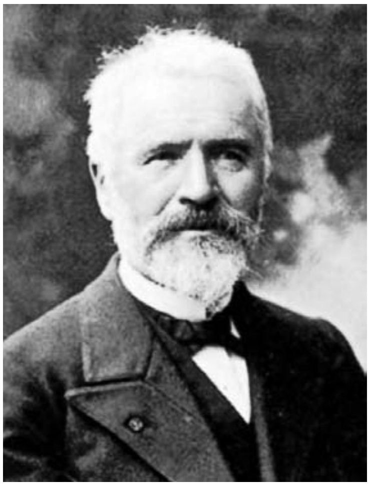
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Método de Gauss-Jordan**

La inversa de una matriz regular A se calcula transformando la matriz $(A \mid I)$, mediante operaciones elementales por filas, en la matriz $(I \mid A^{-1})$:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{operaciones elementales}} (I \mid A^{-1})$$

Camille Jordan (1838-1922)



Este matemático francés trabajó sobre ecuaciones algebraicas, fue un gran defensor de las teorías de Galois y publicó un *Tratado sobre las sustituciones y las ecuaciones algebraicas.*

6.2. Operaciones elementales por filas

Las operaciones elementales por filas en una matriz nos permiten, entre otras cosas, calcular matrices inversas y estudiar rangos de matrices.

- Se denominan **operaciones elementales por filas** en una matriz a las siguientes:
  - **Intercambiar** las filas i y j, que designaremos por $F_i \leftrightarrow F_j$.
  - **Multiplicar** la fila i por el número $k \neq 0$ y sustituirla por el resultado; lo designamos por $F_i \to kF_i$.
  - **Sumar** las filas i y j, multiplicadas por sendos números, y llevar el resultado a la fila i o j. Lo designamos por $F_j \to kF_i + tF_j$.

ACTIVIDADES **RESUELTAS**

8. Calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que, finalmente, queda: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- Utilizando el mismo procedimiento calculamos B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_2 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -F_3}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo que, finalmente, queda: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Fácilmente podemos comprobar que $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$.

9. Dadas la matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve la siguiente ecuación matricial despejando en primer lugar la matriz X:

$$BX + 3C = C\,(B + 3I\,)$$

Operando en la ecuación obtenemos:

$$BX = CB + 3CI - 3C \Rightarrow BX = CB \;\; \boxed{\text{multiplicamos por la izquierda por } B^{-1}} \;\; \Rightarrow B^{-1}\,BX = B^{-1}\,CB \Rightarrow X = B^{-1}\,CB$$

Y operando las matrices obtenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 10 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Rango de una matriz

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sus filas F_1, F_2 y F_3 verifican:

$$F_1 = (1 \;\; 2 \;\; 3) \qquad F_2 = (-1 \;\; 1 \;\; 0) \qquad F_3 = (0 \;\; 3 \;\; 3)$$

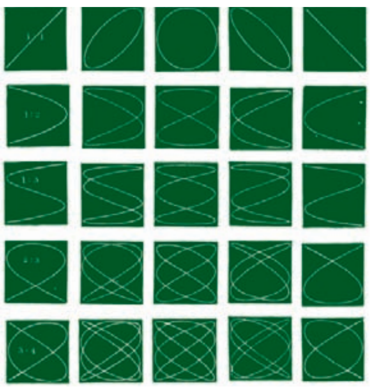
$$F_3 = F_1 + F_2$$

Es decir, F_1 y F_2 son independientes y F_3 depende de F_1 y F_2.

- En una matriz, una fila F_i no nula **depende linealmente** de las filas F_j, F_k, …, F_t si se verifica:

$$F_i = x_1 F_j + x_2 F_k + \ldots + x_n F_t \quad \text{con } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

- En una matriz, una fila F_i no nula es **linealmente independiente** de las filas F_j, F_k, …, F_t si no se puede escribir en la forma anterior.



↑ **Curvas de Lissajous.** Matriz cuadrada de orden 5 cuyos elementos son curvas de Lissajous o las trayectorias producidas por diferentes combinaciones armónicas de la cuerda de un piano.

Un concepto importante asociado a una matriz es su rango o característica, que está relacionado con el número de filas o columnas linealmente independientes.

- El **rango** o **característica** de una matriz es el número de filas o de columnas no nulas y linealmente independientes que tiene esa matriz.

Para calcular el rango de una matriz utilizamos las operaciones elementales por filas, ya que dejan invariante el rango de la matriz resultante. Las filas que dependen de otras se reducen a filas nulas mediante estas transformaciones.

De forma similar existen operaciones elementales por columnas que también dejan invariante el rango de la matriz.

ACTIVIDADES RESUELTAS

10. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Transformamos la matriz A con operaciones elementales por filas en una matriz triangular, y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, ya que han quedado dos filas no nulas tras el proceso de triangulación.

Fácilmente podemos comprobar que F_3 depende linealmente de F_1 y de F_2, puesto que:

$$F_3 = 3F_1 - 2F_2$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

11. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

- El rango de la matriz A valdrá 2 como máximo puesto que, aunque tiene 4 filas, solo cuenta con 2 columnas. Transformamos la matriz A con operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - 4F_1}]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

- El rango de la matriz B valdrá 3 como máximo aunque tenga 4 columnas, ya que solo tiene 3 filas. Transformamos la matriz B con operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 13F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } B = 2$$

12. Demuestra en la matriz B de la actividad anterior que la tercera fila depende linealmente de las filas primera y segunda.

Veamos que podemos escribir:

$$F_3 = xF_1 + yF_2$$

$$(-3 \quad -6 \quad -9 \quad 1) = x(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) + y(2 \quad 4 \quad 6 \quad 9)$$

Operando obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ 2x + 4y &= -6 \\ 3x + 6y &= -9 \\ 4x + 9y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -29 \\ y &= 13 \end{aligned}$$

con lo cual:

$$F_3 = -29F_1 + 13F_2$$

13. Calcula el rango, según los valores de k, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$.

Transformamos la matriz A en una matriz triangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & k-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k-11 \end{pmatrix}$$

Se observa en la matriz triangular que:

- Si $k = 11$, el rango de la matriz A es 2.
- Si $k \neq 11$, el rango de la matriz A es 3.

8. Las matrices en la vida real

En muchas situaciones de la vida real se nos presentan gran cantidad de datos. Para cuantificar la información y operar con ella resulta muy útil el uso de las matrices y sus operaciones.

A continuación podemos ver algunos ejemplos prácticos que muestran la utilidad de las matrices en la vida real.

ACTIVIDADES RESUELTAS

14. Dos tiendas de una misma cadena poseen el siguiente stock de pantalones vaqueros:

TIENDA A

$$\text{Marcas}\quad \begin{array}{r} \text{Talla} \rightarrow \\ \text{Puma} \rightarrow \\ \text{León} \rightarrow \\ \text{Zorro} \rightarrow \\ \text{Lobo} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

TIENDA B

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Talla} \\ \leftarrow \text{Puma} \\ \leftarrow \text{León} \\ \leftarrow \text{Zorro} \\ \leftarrow \text{Lobo} \end{array}\quad \text{Marcas}$$

Ambas tiendas se fusionan:

a) ¿Cuál es el stock disponible?

b) La ganancia en cada marca en la talla 44 es de 7, 6, 9 y 4 euros respectivamente. Si se venden todas las existencias relativas a esta talla, ¿qué ganancias se obtienen?

c) Si las ganancias de cualquier talla son como las de la talla 44, ¿cuál es la matriz que da las ganancias por talla?

a) La suma de ambas matrices, $A + B$, nos da el stock disponible en la fusión de las tiendas:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & 44 \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 & 11 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 10 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Las ganancias que se obtienen en la venta de todos los vaqueros de la talla 44 son:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 161 \text{ euros}$$

c) La primera matriz nos da las ganancias por talla y la segunda por marca:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 & 11 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 10 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 84 & 121 & 221 & 161 & 103 & 46 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \end{array}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

15. En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades distintas: grupos normales y grupos reducidos. La matriz A expresa el número de personas por grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán, y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz B reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75 \\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

a) Obtén la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 20 € por persona en grupos reducidos y 15 € por persona en grupo normal, halla la cantidad en cada uno de los idiomas.

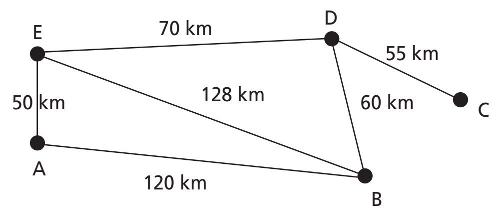
a) La matriz que nos da el número de estudiantes por modalidad e idioma es:

$$B \cdot A = \begin{array}{c} \text{R reducido} \rightarrow \\ \text{N normal} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75 \\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{er}\text{ nivel} & 2^{o}\text{ nivel} & 3^{er}\text{ nivel} & 4^{o}\text{ nivel} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{inglés I} & \text{alemán A} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{er}\text{ nivel} \\ \leftarrow 2^{o}\text{ nivel} \\ \leftarrow 3^{er}\text{ nivel} \\ \leftarrow 4^{o}\text{ nivel} \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{I} & \text{A} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{R} \\ \leftarrow \text{N} \\ \\ \end{array}$$

b) La cantidad que ingresa la academia por cada uno de estos idiomas viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9475 & 7195 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{I} & \text{A} \end{array} \end{array}$$

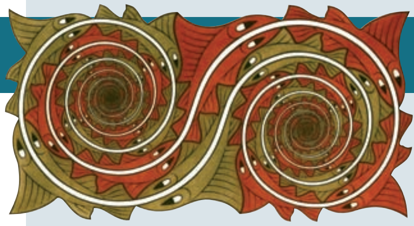
16. El gráfico adjunto representa los caminos que comunican diversas localidades, con sus respectivas distancias. Encuentra la matriz de las distancias más cortas.



La matriz de las distancias es de orden 5 y es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{A} \rightarrow \\ \text{B} \rightarrow \\ \text{C} \rightarrow \\ \text{D} \rightarrow \\ \text{E} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 120 & 50+70+55 & 50+70 & 50 \\ 120 & 0 & 50+60 & 60 & 128 \\ 50+70+55 & 60+55 & 0 & 55 & 70+55 \\ 50+70 & 60 & 55 & 0 & 70 \\ 50 & 128 & 55+70 & 70 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 120 & 175 & 120 & 50 \\ 120 & 0 & 115 & 60 & 128 \\ 175 & 115 & 0 & 55 & 125 \\ 120 & 60 & 55 & 0 & 70 \\ 50 & 128 & 125 & 70 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{A} \\ \leftarrow \text{B} \\ \leftarrow \text{C} \\ \leftarrow \text{D} \\ \leftarrow \text{E} \\ \\ \end{array}$$

→



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ciudad futurista

El siguiente dibujo representa el plano bidimensional de un barrio perteneciente a una gran ciudad del futuro. Una persona se encuentra en *X* y desea llegar hasta *Y*. ¿Cuántos caminos de longitud mínima puede seguir?

FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA

Necesitamos leer varias veces el problema para entender lo que en él se pide. El término o expresión *camino de longitud mínima* no nos resulta fácil de comprender a primera vista, por lo que pintamos en el dibujo varias trayectorias posibles. Observando las trayectorias trazadas, nos damos cuenta de lo que significa *camino de longitud mínima*: es cualquier camino que va desde *X* hasta *Y* y en el cual sólo se permiten dos movimientos, avanzar una longitud a la derecha o avanzar hacia arriba una longitud.

BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

Para operativizar este problema, necesitamos buscar una notación adecuada. Denotamos por *D* el avance de una longitud hacia la derecha y por *A* el avance de una longitud hacia arriba. Utilizando esta notación, las trayectorias trazadas en el dibujo se escribirían así:

ADADDADDA *DDADDAAAD*

Esta notación nos permite ver que todos los caminos de longitud mínima contienen cinco *D* y cuatro *A*. Nuestro problema se reduce a encontrar todas las secuencias de nueve letras que contengan cinco *D* y cuatro *A*.

LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA

Cada secuencia o camino de longitud mínima es una permutación con repetición de nueve elementos en la cual uno se repite cinco veces y el otro cuatro veces. Por esto, el número de caminos de longitud mínima que van desde *X* hasta *Y* es:

$$P_9^{5,4} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$$

REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS DE ÉL

Al revisar el problema, se nos ocurre que podemos calcular el número de caminos de longitud mínima que llegan a cada cruce. También se nos ocurre la pregunta siguiente: ¿tendrán alguna relación o relaciones entre sí estos números representativos de cada cruce?

Protocolo de un problema

Un problema es una situación que plantea una meta a la que hay que llegar. Al intentar resolverlo, hay que tomar una serie de decisiones, ya que de entrada no existe una receta o procedimiento que nos lleve a su solución.

La expresión escrita de las decisiones que va tomando quien resuelve o intenta resolver el problema, así como de los estados de ánimo por los que este va pasando, es lo que constituye **el protocolo de resolución del problema.**

El hecho de sentarnos con calma, papel y un bolígrafo ante un problema e ir escribiendo el protocolo de resolución del mismo es esencial, pues ello nos ayudará a:

- Superar el miedo a empezar.
- Tener presente las ideas que nos van surgiendo.
- Perseverar en la resolución del mismo, no quedándonos atascados sin saber qué hacer, ya que el escribir obliga a estar activos y concentrados.
- Facilitar la revisión del proceso seguido al tener éste escrito.

La solución del problema planteado en la página anterior consistiría en afirmar que el número de caminos de longitud mínima que nos conducen desde el punto X al punto Y es 126.

Observamos que, si presentamos la solución de forma escueta, nos privamos de la riqueza de pensamiento que utiliza el que lo resuelve, así como de la posibilidad de plantearnos cuestiones al revisar el proceso que describe el protocolo.

↑ *El pensador,* de A. Rodin.

BIBLIOGRAFÍA SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- CALLEJO, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Narcea. Madrid.
- CERO, Grupo (1984). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de Matemáticas.* Edición propia. Valencia.
- FERNÁNDEZ, S.; ALAYO, F.; BASARRATE, A.; FOUZ, F. (1991). *Revista Sigma nº 10.* Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco. Bilbao.
- GARDNER, M. *Varios títulos.* Labor y Alianza.
- GUZMÁN, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Labor. Barcelona.
- MASON, J.; BURTON, L. STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Labor-MEC. Barcelona.
- WOOD, L. E. (1987). *Estrategias de pensamiento.* Labor. Barcelona.

ACTIVIDADES

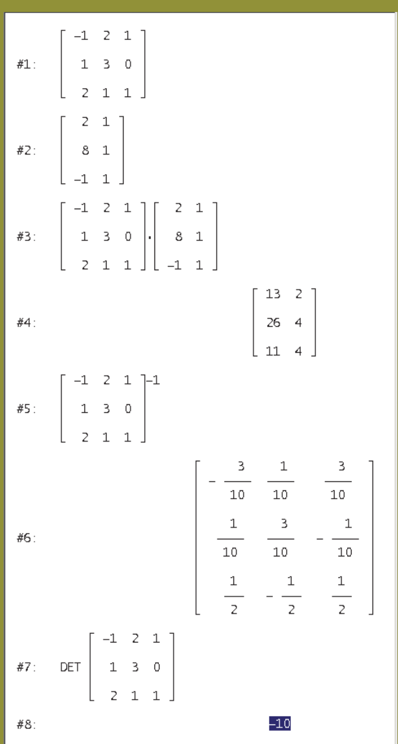
- Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, escribe los protocolos de los siguientes problemas:

  1. **Las edades de la familia.** Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?

  2. **Dos números.** Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

NUEVAS TECNOLOGÍAS

Derive es fácil de manejar. En la parte inferior del área de trabajo se encuentra una barra con una serie de herramientas y el editor de expresiones que utilizaremos para escribir y editar cada una de las expresiones matemáticas con las que trabajemos.



PRACTICA con Derive la resolución de las actividades números 3, 13 y 25.

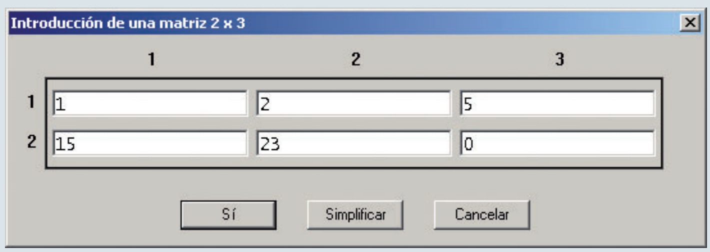
Matrices con Derive

Derive es un programa informático que permite realizar todo tipo de problemas de álgebra lineal como los cálculos y operaciones con matrices (y determinantes, que estudiaremos en la siguiente unidad).

INTRODUCCIÓN DE UNA MATRIZ

Para definir una matriz hemos de seguir los siguientes pasos:

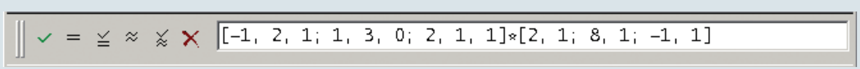
1. Elegimos *Introducir>Matriz* en el menú, o pulsamos el botón [⁝⁝⁝], y aparece una ventana donde introducimos el número de filas y de columnas de la matriz que queremos escribir.
2. Tras pulsar en «Sí» aparece otra ventana donde introducimos los valores de la matriz. Una vez escritos, pulsamos «Sí» y la matriz aparece en el área de trabajo. Si queremos corregirla la llevamos al editor seleccionándola y pulsando la tecla F3.



OPERACIONES CON MATRICES

Derive permite operar con matrices y calcular la matriz traspuesta o la matriz inversa. Para ello:

1. Introducimos la matriz o las matrices que queremos operar y las pasamos al editor (pulsando F3) para añadir la operación que deseemos realizar.



2. Pulsando INTRO aparece la operación en el área de trabajo y mediante el signo igual, =, obtenemos la matriz solución.

En la siguiente tabla vemos las operaciones con matrices que permite realizar Derive:

OPERACIONES	SÍMBOLOS
Suma de matrices	[A]+[B]
Producto de un número real por una matriz	t*[A]
Producto de matrices	[A]*[B]
Potencia enésima	[A]^n
Matriz inversa	[A]^-1
Matriz traspuesta	[A]`
Determinante de una matriz	DET([A])

EN RESUMEN

MATRICES

- definición → SON CUADROS O TABLAS DE NÚMEROS $A_{m \times n} = (a_{ij})$
- algunos tipos
  - RECTANGULARES
  - CUADRADAS
    - TRIANGULARES
    - DIAGONALES
- operaciones
  - SUMA $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
  - PRODUCTO POR UN NÚMERO $k(a_{ij}) = (ka_{ij})$
  - PRODUCTO $(a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik})$ $\quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$
  - TRANSPOSICIÓN $(a_{ij})^t = (a_{ji})$
    - clases
      - SIMÉTRICAS $A^t = A$
      - ANTISIMÉTRICAS $A^t = -A$
- se realizan en ellas → OPERACIONES ELEMENTALES FOR FILAS (COLUMNAS)
  - aplicaciones
    - CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA (MÉTODO DE GAUSS-JORDAN)
    - CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

AMPLÍA CON…

Los diez magníficos (Maeva Ediciones) de **Anna Cesaroli** tiene por subtítulo *Un niño en el mundo de las Matemáticas* y sus dos protagonistas, un niño (Filippo) y su abuelo, nos invitan a realizar un viaje a través de algunos conceptos matemáticos.

En el libro aparecen los números naturales, el ábaco, las cifras, la división, los conejos de Fibonacci, el alfabeto Morse, los números negativos, la proporcionalidad geométrica, el teorema de Pitágoras, el número de oro, y así hasta concluir con uno de los conceptos más de moda actualmente: los objetos fractales.

PRUEBAS DE **ACCESO A LA UNIVERSIDAD** RESUELTAS

Una matriz A se llama antisimétrica cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz A de orden 2 que sea antisimétrica. Calcula A^2, A^4 y A^{33}.

Para una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la igualdad $A^t = -A$ permite obtener o relacionar los elementos a, b, c, d. La anterior igualdad nos permite concluir:

$$A^t = -A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

Por tanto, todas las matrices antisimétricas de orden 2 son de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos las potencias de A indicadas y obtenemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -b^2 I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-b^2 I) \cdot (-b^2 I) = b^4 I \cdot I = b^4 I$$

$$A^8 = b^8 I^2 = b^8 I,\ A^{12} = b^{12} I^2 = b^{12} I,\ \ldots,\ A^{32} = b^{32} I$$

Por tanto, $A^{33} = A^{32} \cdot A = b^{32} I \cdot A = b^{32} A = b^{32} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b^{33} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique la igualdad $A^2 = A$?

Operamos y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a + b = 1 \\ b^2 = b \end{cases}$$

De la ecuación $a^2 = a$ resulta $a = 1$ o $a = 0$. De forma análoga, de $b^2 = b$ resulta $b = 1$ o $b = 0$.

Para que se verifique a la vez la otra ecuación, $a + b = 1$, las únicas soluciones posibles son $a = 1, b = 0$ o $a = 0, b = 1$.

Es decir, hay dos soluciones posibles: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

¿Es conmutativo el producto de matrices? Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo; si es negativa, da un ejemplo que lo ponga de manifiesto.

¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

En el apartado dedicado al producto de matrices quedó claro que dicha operación no siempre es posible, y en el caso que lo sea, no es, en general, conmutativa.

Veamos la forma de las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para ello, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{a = a + 2c,\ 2a + b = b + 2d,\ 2c + d = d\} \Leftrightarrow c = 0,\ d = a$$

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ para cualquier a y b.

■ Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz unidad y O la matriz nula.

b) Calcula razonadamente A^{10}.

a) Comprobamos que es cierta la igualdad $A^3 + I = O$. Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $A^3 = -I$, se cumple $A^3 + I = O$.

b) Tenemos que $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$.

■ **Sea M la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Calcula la matriz J tal que $M = J + I$. Calcula también las matrices J^2, J^3 y J^{1994}.**

$$J = M - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las sucesivas potencias de J son:

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las restantes potencias dan por resultado la matriz nula y por tanto $J^{1994} = J^{1991} \cdot J^3 = 0$.

■ **Halla la matriz $X^2 + Y^2$ si X e Y son dos matrices cuadradas, que verifican:**

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ y resolvemos el sistema matricial $\begin{cases} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$.

Utilizando el método de reducción obtenemos las soluciones:

$$X = 2A - 3B, \quad Y = -3A + 5B$$

Sustituyendo A y B por las correspondientes matrices:

$$X = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = -3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando para obtener $X^2 + Y^2$ obtenemos:

$$X^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y^2 = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \qquad X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$

3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

7. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

   a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$

9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

11. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

■ 12. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

■ 13. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

■ 14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

■ 15. Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

■ 16. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

■ 17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

■ 18. a) Escribe tres matrices de dimensión 3×4, que tengan, respectivamente, rango 2, 1 y 4. Razona la respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4, que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

■ 19. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

■ 20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$ entonces $A^2 = A$.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

■ 21. Contesta las siguientes preguntas:

a) Dada una matriz A, ¿existe otra matriz B tal que el producto AB sea una matriz de una sola fila?

b) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

c) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

■ 22. Sean X, Y, Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X^t$?

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 23. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

■ 24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

■ 25. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

■ 26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ 27. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

■ 28. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcula M^2 y M^3.

b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

■ 29. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

■ 30. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales A tales que $A \cdot A = I$.

■ 31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

b) Utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

■ 32. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.

■ 33. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?

b) Encuentra la matriz inversa de A para $x = -1$.

c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para que la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$ tenga sentido? Halla esta matriz para $x = 1$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión 2×3 cuyos elementos verifican $a_{ij} = (2i - j)^2$ es:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, los valores x e y que verifican $A^2 + x \cdot A + y \cdot I = 0$ son:

a) $x = 2,\ y = 1$ b) $x = -2,\ y = 1$ c) $x = 2,\ y = -1$

3. Si A, B y C son tres matrices tales que existe $AB + C^t$, ¿existe la matriz $BC + A^t$?

a) Sí b) No c) No puede saberse

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; el resultado de $(A \cdot A^t)^2$ es:

a) $\begin{pmatrix} -34 & -45 \\ 45 & 109 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 34 & 45 \\ 45 & 109 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -34 & 45 \\ -45 & 109 \end{pmatrix}$

5. Si descomponemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, esta última es la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. La expresión de todas las matrices X que verifican $AX = XA$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

7. Las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, verifican el sistema $\left.\begin{aligned} 2X + Y &= B \\ X - 2Y &= C \end{aligned}\right\}$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
La matriz $(2X + Y)X - (2X + Y)2Y$ es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz resultante de operar $A^{300} - A^{200}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 300 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

9. Al despejar la matriz X de la ecuación $C(A + X)B = I$, sabiendo que las matrices B y C son invertibles, obtenemos:

a) $X = (CB)^{-1} - A$ b) $X = C^{-1}B^{-1} - A$ c) $X = B - C^{-1}A^{-1}$

10. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3